Tentamen Meetkunde

14 juli, 2010, 14–17 uur

N.B.: dit is een open-boek-tentamen

Exercise 1 (20 pt.)
Gegeven is een compact oppervlak M in $\mathbb{R}^3$, en een eenheidsvector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. De functie $f : M \to \mathbb{R}$ is de hoogte-functie m.b.t. de vector $\mathbf{v}$, gedefiniëerd door $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{v}$.

1. Toon aan dat f een minimum heeft op M.
2. Als $\mathbf{p}$ een punt is waarin dat minimum wordt aangenomen, dan staat de vector $\mathbf{v}$ loodrecht op het raakvlak in $\mathbf{p}$ aan M. Toon dit aan.

Exercise 2 (20 pt.)
Laat $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^2$ een unit-speed kromme zijn, met $\mathbf{p} = \alpha(0)$. De kromming κ_0 in $\mathbf{p}$ is positief. De *kromtestraal* in $\mathbf{p}$ is $\rho := \dfrac{1}{\kappa_0}$, het *kromtemiddelpunt* in $\mathbf{p}$ is het punt $\mathbf{p} + \rho\, N_0$, waarbij N_0 de normaal is van α in $\mathbf{p}$.

Voor $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^2$ en $r > 0$ is de functie $f : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ gedefiniëerd door

$$f(s) = \|\, \alpha(s) - \mathbf{q} \,\|^2 - r^2.$$

Toon aan dat $f(0) = f'(0) = f''(0) = 0$ d.e.s.d.a.[1] $\mathbf{q}$ het kromtemiddelpunt en r de kromtestraal is van α in $\mathbf{p}$.

Exercise 3 (25 pt.)
Laat M_1 en M_2 georiënteerde oppervlakken in $\mathbb{R}^3$ zijn met eenheidsnormaalvectorvelden U_1 respectievelijk U_2, die elkaar snijden onder een positieve hoek; de snijkromme C is dus een reguliere kromme. Voor $\mathbf{p} \in C$ is $\vartheta(\mathbf{p})$ de hoek tussen de normalen $U_1(\mathbf{p})$ en $U_2(\mathbf{p})$. Verder is gegeven dat C een kromtelijn is op M_1. Doel van deze opgave is de *stelling van Joachimstahl* te bewijzen:

$$C \text{ is een kromtelijn van } M_2 \text{ d.e.s.d.a. } \vartheta \text{ constant is op } C.$$

Laat $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$, met I een open interval, een unit-speed parametrisering zijn van (een deel van) C, met raakvector $T(t) = \alpha'(t)$. Zoals gebruikelijk hanteren we de notatie

$$U_1' = \frac{d}{dt} U_1(\alpha(t)),$$

etc. Laat $S_1 : T_{\alpha(t)}M_1 \to T_{\alpha(t)}M_1$ en $S_2 : T_{\alpha(t)}M_2 \to T_{\alpha(t)}M_2$ de *shape operators* zijn van M_1 en M_2 in $\alpha(t)$.

1. Toon aan dat $(U_1 \cdot U_2)' = -U_1 \cdot S_2(T) - U_2 \cdot S_1(T)$.
2. Toon aan dat $U_2 \cdot S_1(T) = 0$.
3. Geef m.b.v. de eerste twee onderdelen van deze opgave een bewijs van de stelling van Joachimstahl.

[1] Dan en slechts dan als (*if and only if*)

Exercise 4 (25 pt.)
Laat $M = \{(x, y) \mid y > 0\}$. We maken van M een Riemanns oppervlak ('geometric surface') door het te voorzien van het inproduct $\langle , \rangle$, gedefiniëerd als volgt. Voor $\mathbf{p} = (x, y) \in M$, en $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in T_{\mathbf{p}}M$ geldt

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{y^2},$$

waarbij $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ het standaard inproduct op $\mathbb{R}^2$ is.

1. Toon aan dat er een functie $f : M \to \mathbb{R}$ is zodat $\{E_1, E_2\}$, met $E_1 = f U_1$ en $E_2 = f U_2$, een orthonormaal frame field is op M. Zoals gebruikelijk zijn U_1 en U_2 de vectorvelden in de x- resp. y-richting met eenheidslengte ten opzichte van het standaard inproduct op $\mathbb{R}^2$.

2. Bepaal de duale 1-vormen van dit frame field (d.w.z., druk deze 1-vormen uit in dx en dy).

3. Bepaal de connectievorm ω_{12} van dit frame field

4. Bereken de Gauß-kromming K in $\mathbf{p} = (x, y) \in M$.

Uitwerking

Opgave 1.

1. Omdat M compact is en f continu, neemt f het minimum aan op M.

2. Laat $\mathbf{w} \in T_{\mathbf{p}}M$, en laat $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ een kromme zijn met $\alpha(0) = \mathbf{p}$ en $\alpha'(0) = \mathbf{w}$. Dan heeft de functie $t \mapsto f(\alpha(t))$ een minimum in $t = 0$, dus

$$\begin{aligned} 0 &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f(\alpha(t)) \\ &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (\alpha(t) \cdot \mathbf{v}) \\ &= \alpha'(0) \cdot \mathbf{v} \\ &= \mathbf{w} \cdot \mathbf{v}, \end{aligned}$$

dus $\mathbf{w}$ staat loodrecht op $\mathbf{v}$. Omdat $\mathbf{w}$ willekeurig is, volgt hieruit dat $\mathbf{v}$ loodrecht staat op $T_{\mathbf{p}}M$.

Opgave 2.

Eerst berekenen we f' en f'', waarbij we gebruiken dat $\alpha'(s) = T(s)$ en $\alpha''(s) = T'(s) = \kappa(s)\,N(s)$:

$$\begin{aligned} f'(s) &= 2\alpha'(s) \cdot (\alpha(s) - \mathbf{q}) \\ f''(s) &= 2\alpha'(s) \cdot \alpha'(s) + 2\alpha''(s) \cdot (\alpha(s) - \mathbf{q}) \\ &= 2(1 + \kappa(s)\,N(s) \cdot (\alpha(s) - \mathbf{q}). \end{aligned}$$

1. Stel $\mathbf{q}$ is kromtemiddelpunt en r is kromtestraal, dan

$$\begin{aligned} f(0) &= \|\mathbf{q} - \mathbf{p}\|^2 - \frac{1}{\kappa_0^2} = 0 \\ f'(0) &= 2T_0 \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{q}) = -\frac{2}{\kappa_0} T_0 \cdot N_0 = 0 \\ f''(0) &= 2(1 + \kappa_0\,N_0 \cdot (-\frac{1}{\kappa_0}\,N_0)) = 0. \end{aligned}$$

2. Stel $f(0) = f'(0) = f''(0) = 0$, dan volgt uit $f'(0) = 2T_0 \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{q})$ dat er een $\lambda \in \mathbb{R}$ is met $\mathbf{p} - \mathbf{q} = \lambda\,N_0$. Invullen in $0 = f''(0) = 2\,(1 + \kappa_0\,N_0 \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{q}))$ geeft $1 + \lambda\kappa_0 = 0$, dus $\lambda = -\frac{1}{\kappa_0}$. Hieruit volgt:

$$\mathbf{q} = \mathbf{p} + \frac{1}{\kappa_0}\,N_0,$$

dus $\mathbf{q}$ is kromtemiddelpunt. Verder geeft $f(0) = 0$ dat $r = \|\mathbf{q} - \mathbf{p}\| = \frac{1}{\kappa_0}$, dus r is kromtestraal.

Opgave 3.

1. Per definitie geldt $U_i' = -S_i(T)$. Toepassing van de productregel geeft dus:

$$(U_1 \cdot U_2)' = U_1' \cdot U_2 + U_1 \cdot U_2' = -S_1(T) \cdot U_2 - U_1 \cdot S_2(T). \tag{1}$$

2. Omdat C kromtelijn van M_1 is geldt: $S_1(T) = \lambda_1 T$, waarbij λ_1 de hoofdkromming in de richting T van M_1 is. Omdat T raakvector is aan M_2, geldt ook $U_2 \cdot T = 0$. Hieruit volgt $U_2 \cdot S_1(T) = 0$.

3. Als C kromtelijn is van M_2, dan volgt – als in onderdeel 2 – dat $U_1 \cdot S_2(T) = 0$. Uit (1) volgt dan: $(U_1 \cdot U_2)' = 0$, dus $\cos\vartheta = U_1 \cdot U_2$ is constant, en dus is ϑ constant.

Omgekeerd volgt uit de eerste twee onderdelen: $(U_1 \cdot U_2)' = -U_1 \cdot S_2(T)$. Verder: Als ϑ constant is, dan is $0 = (U_1 \cdot U_2)' = -S_2(T) \cdot U_1$. Sowieso geldt: $S_2(T) \cdot U_2 = 0$, dus staat $S_2(T)$ loodrecht op de normalen van M_1 en M_2 langs C. Dus geldt $S_2(T)$ is parallel aan T, zodat T een hoofdkrommingsrichting is. M.a.w.: C is kromtelijn.

Opgave 4.

1. $\langle fU_1, fU_2 \rangle = \dfrac{f^2}{y^2}$, dus neem $f(x, y) = y$.

2. Laat ϑ_1 en ϑ_2 de duale 1-vormen zijn, dan

$$\vartheta_1 = \vartheta_1(U_1)\,dx + \vartheta_1(U_2)\,dy = \frac{1}{y}\,dx.$$

Analoog: $\vartheta_2 = \dfrac{1}{y}\,dy$.

3. Laat $\omega_{12} = P\,dx + Q\,dy$. Om P en Q te bepalen gebruiken we de eerste structuurvergelijkingen

$$d\vartheta_1 = \omega_{12} \wedge \vartheta_2 \quad \text{en} \quad d\vartheta_2 = -\omega_{12} \wedge \vartheta_1.$$

Deze geven

$$\frac{1}{y^2} dx \wedge dy = \frac{1}{y} P\,dx \wedge dy,$$
$$0 = \frac{1}{y} Q\,dx \wedge dy.$$

Hieruit volgt

$$P = \frac{1}{y}, \quad Q = 0,$$

dus

$$\omega_{12} = \frac{1}{y}\,dx.$$

4. Omdat $d\omega_{12} = -K\,\vartheta_1 \wedge \vartheta_2$, en $d\omega_{12} = \dfrac{1}{y^2}\,dx \wedge dy = \vartheta_1 \wedge \vartheta_2$, concluderen we $K = -1$.